ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ GIANG

VỀ THUẬT TOÁN CHIẾU GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN ĐƯỢC LỒI

Chuyên ngành:	**Toán ứng dụng**
Mã số:	**60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Danh mục các ký hiệu

$\mathbb{R}$	Tập số thực
$\mathbb{R}_+$	Tập số thực không âm
$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	Tập số thực mở rộng
$\mathbb{C}$	Tập số phức
$\mathbb{N}$	Tập hợp số tự nhiên
$\mathcal{H}$	Không gian Hilbert
ℓ^2	Không gian các dãy số vô hạn
$\|x\|$	Chuẩn của véctơ $x \in \mathcal{H}$
$\lvert x\rvert$	Giá trị tuyệt đối của $x \in \mathbb{R}$
$(x^{(n)})$ hay $\{x_k\}$	Dãy điểm trong $\mathcal{H}$
$x_k \rightharpoonup x_0$	x_k hội tụ yếu tới x_0
$x_k \to x_0$	x_k hội tụ mạnh (hội tụ theo chuẩn) tới x_0
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai véctơ $x, y \in \mathcal{H}$
$[x, y]$	Đoạn thẳng nối x và y
$x \leq y$	Véctơ x nhỏ hơn hay bằng véctơ y $(x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, n)$
$x \geq y$	Véctơ x lớn hơn hay bằng véctơ y $(x_i \geq y_i, \forall i = 1, \dots, n)$
$\mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^k\}$	Bao lồi của các điểm $x^1, \dots, x^k$
$x \in X$	x là một phần tử của tập X
$x \notin X$	x không là phần tử của tập X
$\emptyset$	Tập hợp rỗng
$d_C(x)$	Khoảng cách từ điểm x tới tập C
$A + B$	Tổng véctơ của hai tập A và B

$A - B$	Hiệu véctơ của hai tập A và B
$A \cup B$	Hợp của hai tập A và B
$A \cap B$	Giao của hai tập A và B
$A \times B$	Tích Đề các của hai tập A và B
$A \subset B$	A là tập con của B
$A \subseteq B$	A là tập con (có thể bằng) của B
$\operatorname{int}_Y S$	Phần trong của S đối với Y $(S, Y$ là tập con tùy ý của $\mathcal{H})$
$\operatorname{int} S$	Phần trong của S $(=\operatorname{int}_{\mathcal{H}} S)$
$\overline{S}$	Bao đóng của tập S
$\operatorname{conv} S$	Bao lồi của tập S
$\overline{\operatorname{conv}} S$	Bao lồi đóng của tập S
$\overline{\operatorname{aff}} S$	Bao afin đóng của tập S
$\operatorname{span} S$	Không gian con tuyến tính nhỏ nhất của $\mathcal{H}$ chứa S
$\operatorname{icr} S$	Lõi bên trong của S $(= \operatorname{int}_{\overline{affS}} S)$
r^+	Phần dương của số $r \in \mathbb{R} = \max\{r, 0\}$
$\overline{\lim}$	Giới hạn trên (của dãy số thực)
$\underline{\lim}$	Giới hạn dưới (của dãy số thực)
$\forall x$	Với mọi x
$\exists x$	Tồn tại x
Id	Toán tử đồng nhất trong $\mathcal{H}$
P_C	Toán tử chiếu lên tập C
$\operatorname{Fix} T$	Tập điểm bất động của toán tử T

MỞ ĐẦU

Trong toán học và vật lý học hiện đại (ví dụ, chụp X quang điện toán hóa), ta thường gặp bài toán sau đây với tên gọi là *bài toán chấp nhận được lồi* (convex feasibility problem), phát biểu toán học chính xác của bài toán như sau: Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert và $C_1, C_2, \ldots, C_N$ là các tập lồi đóng trong H với giao $C = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_N \neq \emptyset$. Hãy tìm một điểm $x \in C$?

Có hai loại bài toán chính thường gặp:

1. Các tập C_i đơn giản, theo nghĩa có thể tính được hình chiếu (ánh xạ điểm gần nhất) trên C_i. Chẳng hạn, khi C_i là một siêu phẳng hay nửa không gian.

2. Không thể tính trực tiếp hình chiếu trên C_i, tuy nhiên có thể mô tả hình chiếu trên tập xấp xỉ nào đó rộng hơn C_i. Thường, C_i là tập mức dưới của một hàm lồi nào đó.

Tiếp cận hay được sử dụng để giải bài toán chấp nhận được lồi là thuật toán chiếu. Ý tưởng của thuật toán là: chiếu trên từng tập C_i (hoặc trên tập xấp xỉ của nó) để tạo ra dãy các điểm mà chúng hội tụ tới nghiệm của bài toán chấp nhận được lồi. Đó cũng là cách tiếp cận được phân tích, nghiên cứu và trình bày trong tài liệu tham khảo [3].

Đề tài luận văn "Về thuật toán chiếu giải bài toán chấp nhận được lồi" nhằm mục đích tìm hiểu và giới thiệu nội dung bài báo [3], trong đó trình bày nghiên cứu cải tiến, hợp nhất và điểm lại các kết quả nghiên cứu trước đó về các thuật toán chiếu.

Luận văn đề cập tới bài toán chấp nhận được lồi trong không gian Hilbert và thuật toán chiếu giải bài toán. Luận văn gồm hai chương:

Chương 1. "Kiến thức chuẩn bị". Chương này nhắc lại một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert, ánh xạ không giãn, toán tử chiếu và một số kiến thức liên quan. Tài liệu chính được sử dụng [1] - [4]. Trong chương có một số tiểu mục sau:

1.1. Không gian Hilbert thực: nhắc lại các khái niệm và sự kiện cơ bản (luật hình bình hành, toán tử tuyến tính, sự hội tụ mạnh, hội tụ yếu, ...).

1.2. Ánh xạ không giãn và toán tử chiếu: Các khái niệm và tính chất (ánh xạ không giãn bền vững, ánh xạ trung bình, nguyên lý bán đóng, ...).

1.3. Ánh xạ co và dãy đơn điệu Fejér: Tính chất cơ bản của toán tử dùng trong sơ đồ lặp và của dãy lặp nhận được.

Chương 2. "Thuật toán giải bài toán chấp nhận được lồi". Chương này đề cập tới các thuật toán (bao gồm thuật toán chiếu) giải bài toán chấp nhận được lồi. Tài liệu chính được sử dụng [3], [5], [6]. Chương 2 có một số tiểu mục sau:

2.1. Mô tả sơ đồ thuật toán: chính quy tiệm cận, nới lỏng, kỳ dị, trọng số,...

2.2. Tính chất cơ bản của thuật toán: Các tính chất, ví dụ và nhận xét.

2.2. Các kết quả hội tụ: Định lý lưỡng phân I và sự hội tụ theo tôpô yếu.

2.3. Thuật toán chiếu: Nguyên mẫu của thuật toán chiếu hội tụ, hội tụ tuyến tính, định lý lưỡng phân II và sự hội tụ theo tôpô yếu,...

Do thời gian có hạn nên luận văn này chủ yếu chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong soạn thảo văn bản chắc chắn không tránh khỏi có những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn GS.TS. Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các GS, PGS, TS của Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên và của Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2017

Tác giả luận văn

Phạm Thị Giang

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhắc lại một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert: Các đồng nhất thức, bất đẳng thức hữu ích, ánh xạ không giãn, nguyên lý bán đóng, toán tử chiếu, ánh xạ co (co mạnh) và một số kiến thức liên quan. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1] - [4].

1.1 Không gian Hilbert thực

1.1.1 Khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1. Không gian tiền Hilbert (pre-Hilbert space) là một không gian véctơ X trên $\mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$) cùng với tích vô hướng (inner product) xác định bởi $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$) thỏa mãn với $x, y, z \in X$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$):

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$,

(ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$,

(iii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,

(iv) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,

(v) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Mỗi tích vô hướng trên X tạo ra một chuẩn tương ứng

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ với mọi } x \in X.$$

Nếu X là không gian đủ theo chuẩn vừa xây dựng (nói cách khác, nếu X là không gian đủ theo metric sinh ra từ chuẩn này, hay X là không gian Banach với chuẩn đó) thì X được gọi là một không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1. (i) $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ là không gian Hilbert trên $\mathbb{R}$.

(ii) $\mathbb{C}^n$ với tích vô hướng $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n = u_i \overline{v}_i$ là không gian Hilbert trên $\mathbb{C}$, trong đó $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

(iii) ℓ^2 với tích vô hướng

$$\langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b}_j$$

là không gian Hilbert trên $\mathbb{C}$ (ở đây $a = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}, b = \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$). Sự kiện các chuỗi đối với $\langle a, b\rangle$ luôn hội tụ là hệ quả của bất đẳng thức Hölder với $p = q = 2$. Ở đây dễ kiểm tra lại các tính chất mà tích vô hướng cần phải thỏa mãn. Chuẩn sinh ra từ tích vô hướng là chuẩn $\|\cdot\|_2$ đã có trên ℓ^2.

(iv) $L^2[0,1], L^2[a,b]$ và $L^2[\mathbb{R}]$ tất cả đều là các không gian Hilbert đối với tích vô hướng

$$\langle a, b\rangle = \int f\overline{g}$$

(tích phân được lấy trên miền thích hợp).

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực $(\langle x, y\rangle, \lambda \in \mathbb{R})$ với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$. Ký hiệu d là khoảng cách, nghĩa là

$$(\forall x \in \mathcal{H})\ (\forall y \in \mathcal{H})\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \text{ và } d(x, y) = \|x - y\|.$$

Tập con $C \subset \mathcal{H}$ gọi là trực giao nếu $x, y \in C, x \neq y \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$. C gọi là trực chuẩn nếu nó là tập con trực giao và có thêm $\|x\| = 1$ với mỗi $x \in C$. Để ý rằng các định nghĩa này áp dụng cho mọi tập con C có hữu hạn hay vô số phần tử. Cũng cần chú ý là nếu C là tập con trực giao thì $\{x/\|x\| : x \in C\backslash\{0\}\}$ là tập con trực chuẩn.

Tập trực chuẩn $C \subset \mathcal{H}$ gọi là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$ nếu $\overline{\mathrm{span}} C = \mathcal{H}$ (tức là không gian con tuyến tính đóng nhỏ nhất của $\mathcal{H}$ chứa C trùng với $\mathcal{H}$). Không gian $\mathcal{H}$ là tách được nếu $\mathcal{H}$ có một cơ sở trực chuẩn đếm được. Ký hiệu toán tử đồng nhất trên $\mathcal{H}$ là Id.

Hình cầu đơn vị đóng của $\mathcal{H}$ ký hiệu là $B(0,1) = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x\| \leq 1\}$.

Dãy $\{x_k\}$ trong $\mathcal{H}$ gọi là hội tụ yếu tới x_0, ký hiệu $x_k \rightharpoonup x_0$, nếu $\langle a, x_k\rangle \to \langle a, x_0\rangle$ với mỗi $a \in \mathcal{H}$. Dãy $\{x_k\}$ trong $\mathcal{H}$ gọi là hội tụ mạnh tới x_0, ký hiệu $x_k \to x_0$, nếu $\|x_k - x_0\| \to 0$ (còn gọi hội tụ theo tích vô hướng và hội tụ theo chuẩn).

1.1.2 Đồng nhất thức và bất đẳng thức cơ bản

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Giả sử $x, y \in \mathcal{H}$. Khi đó

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Hơn nữa, $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+)\ x = \alpha y$ hay $y = \alpha x$.

Bổ đề 1.1. *Giả sử x, y và $z \in \mathcal{H}$. Khi đó, các điều sau là đúng:*

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

(ii) *Luật hình bình hành:* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

(iii) *Đồng nhất thức phân cực:* $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$.

(iv) *Đồng nhất thức Apollonius:*

$$\|x-y\|^2 = 2\|z-x\|^2 + 2\|z-y\|^2 - 4\|z-(x+y)/2\|^2.$$

Chứng minh. (i) Kiểm tra dễ dàng.
(ii) và (iii): Từ (i) suy ra

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Lần lượt cộng và trừ (i) với đồng nhất thức này, ta nhận được (ii) và (iii).
(iv) Áp dụng (i) đối với $(z-x)/2$ và $(z-y)/2$. □

Bổ đề 1.2. *Giả sử x và $y \in \mathcal{H}$. Khi đó, các điều sau là đúng:*

(i) $\langle x, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow (\forall \alpha \in \mathbb{R}_+)\ \|x\| \leq \|x-\alpha y\| \Leftrightarrow (\forall \alpha \in [0,1])\ \|x\| \leq \|x-\alpha y\|$.

(ii) $x \perp y \Leftrightarrow (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \|x\| \leq \|x-\alpha y\| \Leftrightarrow (\forall \alpha \in [-1,1])\ \|x\| \leq \|x-\alpha y\|$.

Chứng minh. (i) Để ý rằng

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \|x-\alpha y\|^2 - \|x\|^2 = \alpha(\alpha\|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle).$$

Từ đó trực tiếp suy ra có chiều thuận ($\Rightarrow$). Ngược lại, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\|x\| \leq \|x-\alpha\|$, từ đẳng thức trên suy ra $\langle x, y\rangle \leq \alpha\|y\|^2/2$. Khi $\alpha \downarrow 0$, ta nhận được $\langle x, y\rangle \leq 0$.
(ii) là hệ quả của (i), bởi vì $x \perp y \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \leq 0$ và $\langle x, -y\rangle \leq 0]$. □

Hệ quả 1.1. *Giả sử $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó,*

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2.$$

Mệnh đề 1.1. (Tính lồi chặt). *Nếu $x, y \in \mathcal{H}$ thì*

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \textit{ kéo theo } \|y\| \cdot x = \|x\| \cdot y.$$

Chứng minh. Suy ra từ luật bình hành. □

1.1.3 Toán tử tuyến tính và phiếm hàm

Cho X và Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn thực. Ta nhắc lại, toán tử $T : X \to Y$ là tuyến tính nếu $T[\alpha x + \beta y] = \alpha Tx + \beta Ty$, $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Toán tử tuyến tính T là liên tục tại một điểm thuộc X khi và chỉ khi T liên tục Lipschitz. Đặt

$$\mathscr{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ tuyến tính và liên tục}\}$$

và $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X, X)$. Với chuẩn toán tử xác định bởi

$$(\forall T \in \mathscr{L}(X, Y))\ \|T\| = \sup \|T(B(0, 1))\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

thì $\mathscr{L}(X, Y)$ là không gian tuyến tính định chuẩn và đó là không gian Banach nếu Y là không gian Banach.

Định lý Banach - Steinhaus (Tính bị chặn đều). Giả sử X là một không gian Banach thực, Y là một không gian tuyến tính định chuẩn thực và $(T_i)_{i \in I}$ là một họ các toán tử bị chặn theo từng điểm, nghĩa là $(\forall x \in X)\ \sup \|T_i x\| < +\infty$. Khi đó, $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$.

Định lý biểu diễn Riesz - Fréchet sau cho thấy có thể đồng nhất mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$ với một véctơ trong $\mathcal{H}$.

Định lý Riesz - Fréchet. Giả sử $f \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R})$. Khi đó, tồn tại duy nhất véctơ $u \in \mathcal{H}$ sao cho $(x \in \mathcal{H})\ f(x) = \langle x, u \rangle$. Hơn nữa, $\|f\| = \|u\|$.

Cho $\mathcal{K}$ là không gian Hilbert thực và $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ liên hợp (adjoint) của T là toán tử duy nhất $T^* \in \mathscr{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ thỏa mãn

$$(\forall x \in \mathcal{H})\ (\forall y \in \mathcal{K})\ \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

1.1.4 Tôpô mạnh và tôpô yếu

Tôpô metric của $(\mathcal{H}, d)$, tức là tôpô nhận họ tất cả các hình cầu mở làm cơ sở lân cận, được gọi là tôpô mạnh (strong topology) hay tôpô theo chuẩn (norm topology) của $\mathcal{H}$. Như vậy, lưới $(x_a)_{a \in A}$ trong H hội tụ mạnh (converges strongly) tới điểm x nếu $\|x_a - x\| \to 0$, ký hiệu $x_a \to x$.

Khi sử dụng mà không nói gì thêm, các khái niệm tôpô trong $\mathcal{H}$ (đóng, mở, lân cận, liên tục, compac, hội tụ, ...) sẽ luôn được hiểu theo nghĩa tôpô mạnh.

Một khái niệm tôpô rất quan trọng khác (tôpô yếu) cũng được đề cập tới.